Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
Кафедра конструирования и технологии радиоэлектронных средств

# Паспорт
# расчетно-графического задания

по дисциплине «Теория обнаружения и оценок

Выполнение расчетно-графического задания (далее - РГЗ) является формой текущей аттестации (контроля) по дисциплине, предусмотренной учебным планом.

Цель РГЗ: студенты должны освоить и научиться применению принципов, методов и алгоритмов решения основных и вспомогательных задач обнаружения и оценивания сигналов в условиях априорной неопределенности.

РГЗ состоит из трех задач:

1) Характеристики случайных величин и случайных процессов,
2) Функциональные преобразования случайных величин,
3) Оценка параметров сигналов,

Количество заданий достаточно для обеспечения, каждого обучающегося индивидуальным заданием РГЗ. Номер задания выдается студентам методом жеребьевки

Замена задания РГЗ осуществляется по согласованию с преподавателем из числа резервных (не занятых) заданий.

Перед выполнением задания студент должен ознакомиться с теоретическим материалом по обнаружению и оценке параметров сигналов, методам преодоления априорной неопределенности относительно параметров сигнала и шума.

Преподаватель осуществляет руководство по выполнению задания, оказывает консультационную помощь и принимает отчет по РГЗ.

По результатам выполнения РГЗ выполняется отчет, который состоит из следующих частей:

1. Титульный лист (см. ниже)
2. Задание 1 (по вариантам)
3. Задание 2 (по вариантам)
4. Задание 3 (по вариантам)
5. Список литературы и источников

*Требования к оформлению:*

Объем РГЗ до 10 страниц машинописного текста формата А4. Шрифт Times New Roman, 12. Формулы набираются в редакторе MathType. Размещение сканированных формул не допускается. Нумерация страниц сквозная, в нижней части листа по центру арабскими цифрами. Работа должна быть отредактирована, не содержать орфографических, синтаксических и стилистических ошибок.

Отчет в установленные сроки сдается для проверки. Преподаватель оценивает качество работы, отмечает положительные стороны и недостатки работы и определяет, допускается ли она к защите. При необходимости преподаватель возвращает РГЗ студенту для доработки и устанавливает сроки повторного предоставления для проверки. До защиты работы студентом должны быть сделаны необходимые исправления и дополнения по всем замечаниям преподавателя.

При положительном результате оценивания РГЗ(Р) студент её распечатывает, передает на кафедру и защищает до сессии в назначенное преподавателем время.

Защита РГЗ(Р) состоит в индивидуальном устном собеседовании студента с преподавателем. В процессе защиты выявляется уровень знаний студента, степень его самостоятельности при выполнении работы. По результатам защиты студенту выставляется оценка в соответствии с критериями, приведенными в п. 2 настоящего Паспорта.

1. **Уровни сформированности компетенций и критерии оценки**

РГЗ считается выполненной **на продвинутом** уровне, если все необходимые расчеты произведены самостоятельно и без ошибок; все разделы РГЗ(Р) выполнены правильно и в полном объеме; работа оформлена в соответствии с требованиями; сдана преподавателю в указанные сроки и не возвращалась для доработки; даны полные и развернутые выводы и рекомендации; на защите студентом даны уверенные и аргументированные ответы, что свидетельствует об уровне сформированности компетенций и соотнесенных с ними индикаторов на продвинутом уровне. Оценка составляет *от 17 до 20 баллов.*

РГЗ считается выполненной **на базовом** уровне, если все необходимые расчеты произведены самостоятельно и без существенных ошибок; все разделы РГЗ выполнены правильно, но есть замечания к полноте предоставления информации; работа оформлена в соответствии с требованиями; сдана преподавателю в указанные сроки и однократно возвращалась студенту для незначительной доработки; в заключении даны выводы и рекомендации; на защите студентом допущены непринципиальные ошибки, что свидетельствует об уровне сформированности компетенций и соотнесенных с ними индикаторов на базовом уровне. Оценка составляет *от 13 до 16 баллов.*

РГЗ считается выполненной **на пороговом** уровне, если все необходимые расчеты произведены самостоятельно, но с ошибками, часть из которых носит принципиальный характер; есть замечания к полноте предоставления информации; работа оформлена в соответствии с требованиями; сдана преподавателю, но неоднократно возвращалась студенту для доработки; в заключении даны краткие выводы; защита РГЗ вызывает у студента серьезные затруднения, что свидетельствует об уровне сформированности компетенций и соотнесенных с ними индикаторов на пороговом уровне. Оценка составляет *от 10 до 12 баллов.*

РГЗ считается **не выполненной**, если расчеты произведены с серьезными ошибками; есть замечания к полноте предоставления информации и оформлению; РГЗ(Р) была сдана преподавателю, но неоднократно возвращалась студенту для доработки, что не привело к улучшению ее качества; РГЗ(Р) не допущена до защиты, что свидетельствует об не сформированности компетенций и соотнесенных с ними индикаторов. Оценка составляет *менее 10 баллов*.

2. **Шкала оценки**

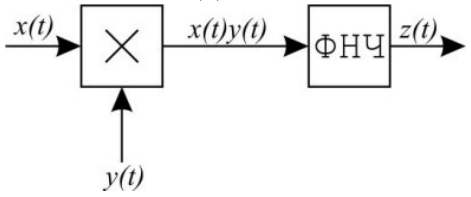
В общей оценке по дисциплине баллы за РГЗ(Р) учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, приведенными в рабочей программе дисциплины.

РГЗ как форма текущей аттестации (контроля) по дисциплине считается успешно выполненной, если сумма полученных баллов по всем его заданиям составляет от 10 до 20 баллов включительно.

3. **Примерный перечень заданий РГЗ**

## Вариант 1

### Задача 1



На синхронный детектор воздействует сумма сигнала и шума $s(t)+\xi(t)$, а также опорное гармоническое колебание $A_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$. Сигналом s(t) является модулированное по случайному закону гармоническое колебание $s(t)=\zeta(t)\cdot\cos(\omega_0\cdot t)$, где $\zeta(t)$ - независимый от $\xi(t)$ стационарный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_\zeta(f)=\begin{cases}S_0 \text{ при } 0\le f\le F/2;\\ 0 \text{ при других } f.\end{cases}$$

Стационарный шум $\xi(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и спектральную плотность

$$S_\xi(f)=\begin{cases}N_0 \text{ при } f_0-{}^{F}\!/_{2}\le f\le f_0+F/2;\\ 0 \text{ при других } f.\end{cases}$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра низких частот постоянна и отлична от нуля лишь при частотах $0\le f\le F$. Найти отношение дисперсии сигнала $\sigma_s^2$ к дисперсии шума $\sigma^2$на выходе фильтра.

## Задача 2

На вход дифференцирующего устройства поступает случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_X(t)=\sin(\beta\cdot t)$ и корреляционной функцией $R_X(t_1,t_2)=D_X\cdot e^{-\alpha\cdot(t_2-t_1)^2}$.

Определить математическое ожидание $m_Y(t)$ и дисперсию $D_Y(t)$ процесса $Y(t)$ на выходе системы.

## Задача 3

По цифровому последовательному каналу связи передается последовательность прямоугольных видеоимпульсов. Логической «1» соответствует амплитуда импульса, равная $U_1$, логическому «0» - 0 В. На вход детектора поступает аддитивная смесь гауссового шума $\eta(t)$ и полезного сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных видеоимпульсов с амплитудой $U_m=U\cdot K$ ($K$ - коэффициент передачи канала). Предполагается, что канал не искажает форму видеоимпульса, а лишь добавляет шум с дисперсией $\sigma^2$. Для детектирования используется поэлементный прием с простейшим алгоритмом детектирования, задаваемым функцией

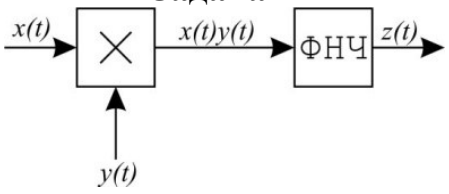
$$g[x(t_i)]=\begin{cases}1,\ \textit{если}\ x(t_i)>U_{REF};\\ 0,\ \textit{если}\ x(t_i)\le U_{REF}.\end{cases}$$

Здесь $t_i$ - середина *i*-го видеоимпульса, $i=1,...,n;$ $n$ - число импульсов в посылке, $U_{REF}$ - пороговое напряжение.

По посылке, содержащей $n/2$ нулей и $n/2$ единиц, определить коэффициент передачи канала $K$ с применением метода максимального правдоподобия, если $U_1=2{,}5$ В, $U_{REF}=$ 1В, $\sigma=0{,}5$ В, $n=50$. Оценить среднеквадратическую погрешность оценки для случая $K=0{,}5$ В. Смоделировать задачу в среде MATHCAD.

# Вариант 2

## Задача 1




На рисунке приведена схема синхронного детектора, представляющего собой последовательное соединение перемножителя и идеального низкочастотного фильтра, пропускающего практически без искажений низкочастотную часть спектра и не пропускающего высокочастотную часть. На один вход перемножителя подается гармонический сигнал $s(t)=A_1\cdot\sin(\omega_0\cdot t)$, а на другой - узкополосный стационарный шум $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2\cdot e^{-\alpha\cdot|\tau|}\cdot\left(\cos(\omega_0\cdot\tau)+\frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0\cdot|\tau|)\right),\alpha\ll\omega_0.$$

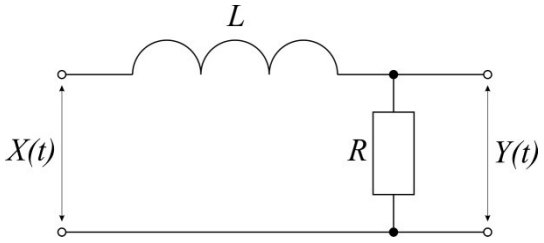
Определить корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$ колебания $\eta(t)$ на выходе фильтра в стационарном состоянии.

## Задача 2

На цепь, составленную из последовательно соединенных индуктивности $L$ и сопротивления $R$, воздействует напряжение $X(t)$, представляющее собой белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_X = 0$ и энергетическим спектром

$S_X(\omega) = N_0/2$, $-\infty < \omega < \infty$.

Найти энергетический спектр $S_Y(\omega)$ и корреляционную функцию $R_Y(\tau)$ напряжения $Y(t)$ на сопротивлении $R$.




## Задача 3

Наблюдается процесс $x(t) = U_m s(t) + \eta(t)$. $U_m$ – амплитуда сигнала; $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ – нормированный по амплитуде синусоидальный сигнал; $T$ – период; $\varphi$ – начальная фаза; $\eta(t)$ - стационарный дифференцируемый гауссов процесс с дисперсией $\sigma^2$. Для оценки периода синусоидального сигнала в цифровых системах используют метод, основанный на измерении длин интервалов между соседними пересечениями наблюдаемым процессом нулевого уровня. Плотности распределения вероятностей *i*-го момента времени пересечения нулевого уровня снизу вверх (передний фронт) и сверху вниз (задний фронт) имеют вид:

$$w(t_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_+^2}} \exp\left\{-\frac{(t_i^+ - t_{00}^+ - iT)^2}{2\sigma_+^2}\right\},$$

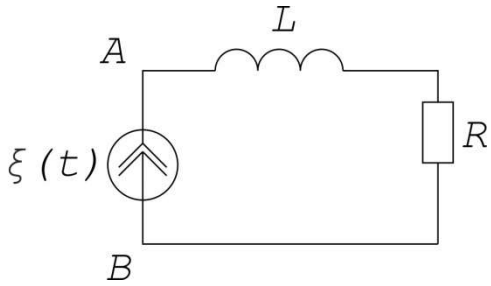
$$w(t_i^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_-^2}} \exp\left\{-\frac{(t_i^- - t_{00}^+ - T/\nu - iT)^2}{2\sigma_-^2}\right\}.$$

Здесь $\sigma_+ = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT)|]$, $\sigma_- = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT + T/\nu)|]$, $t_{00}^+ = \varphi \cdot T/2\pi$, $q = U_m/\sigma$ - отношение сигнал/шум, $\nu$ - скважность сигнала, измеренная на уровне 0 В (для синусоиды $\nu = 2$), $s'(\cdot)$ - производная сигнала $s(t)$. Используя метод максимального правдоподобия, оценить начальную фазу $\varphi$ при условии, что величины $U_m$, $T$ и $\sigma^2$ заранее не известны. Определить погрешность оценки при $q = 200$ и $n = 80$. Смоделировать задачу в среде MATHCAD.

# Вариант 3

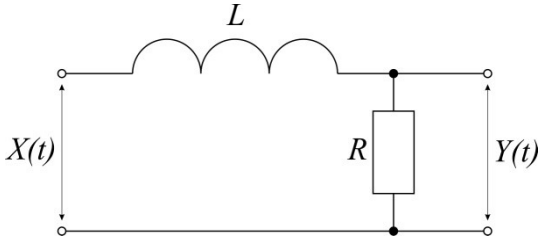
## Задача 1

По цепи, состоящей из последовательного соединения сопротивления *R* и индуктивности *L*, протекает случайный стационарный дифференцируемый ток $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$. Найти дисперсию напряжения на индуктивности *L*, а также между точками AB.




## Задача 2

Определить корреляционную функцию $R_X(\tau)$ случайного напряжения $X(t)$ на входе линейной цепи $RL$ при условии, что выходное напряжение $Y(t)$ представляет собой стационарный гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией $R_Y(\tau) = D_Y e^{-\alpha\tau^2}$.



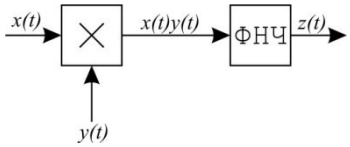

## Задача 3

Для оценки качества канала передачи данных применяется средняя вероятность ошибки передачи сообщений $p_{ош}$. Для измерения параметра действующего канала по нему передают тестовую последовательность и по результатам приема получают оценку $\widehat{p}_{ош}$ величины $p_{ош}$.

Пусть по цифровому последовательному каналу связи информация передается в виде последовательности прямоугольных видеоимпульсов, значению логической «1» соответствует амплитуда импульса, равная $U_1$, логическому «0» - $U_0 = 0$. На приемном конце используется поэлементный прием, причем алгоритм детектирования обеспечивает постоянство значений вероятности $p_{01}$ (принять «0 за «1»), равной 0.1, и вероятности $p_{10}$ (принять «1» за «0»). Полагая, что в реальных условиях эксплуатации канала вероятности появления в сообщении «0» и «1» одинаковы, предложить тестовую последовательность и оценить среднюю вероятность ошибки $p_{ош}$ с погрешностью не хуже 0,1% для случая, когда $p_{10} = 0.2$. Смоделировать задачу в среде MATHCAD.

# Вариант 4

## Задача 1



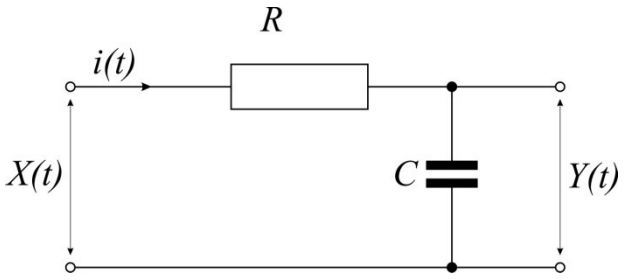

На один вход синхронного детектора подается сумма модулированного колебания $A_0 \cdot (1 + \mathrm{m} \cdot \cos(\Omega \cdot \mathrm{t})) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \mathrm{t})$ и узкополосного стационарного шума $\xi(t)$ с дисперсией $\sigma_\xi^2$, а на другой - опорное колебание $A_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot \mathrm{t})$. Определить отношение сигнал/шум на выходе детектора. Полезным сигналом считать колебание с частотой модуляции Ω.

## Задача 2

На $RC$ цепь воздействует случайное напряжение $X(t)$, представляющее собой стационарный белый шум со средним значением $m_X$ и корреляционной функцией

$R_X(\tau) = D_X e^{-\alpha\tau^2}$ .

Определить среднее значение $m_Y(t)$ и корреляционную функцию $R_Y(\tau)$ напряжения $Y(t)$ на емкости $C$ .




## Задача 3

Для оценки качества канала передачи данных зачастую используется средняя вероятность ошибки передачи сообщений $p_{ош}$. Для измерения параметра действующего канала по нему передают тестовую последовательность и по результатам приема получают оценку $\widehat{p}_{ош}$ величины $p_{ош}$. Пусть по цифровому последовательному каналу связи информация передается в виде последовательности прямоугольных видеоимпульсов, причем значению логической «1» соответствует амплитуда импульса, равная $U_1$, логическому «0» - $U_0$. На приемном конце используется поэлементный прием, причем алгоритм детектирования обеспечивает постоянство значений вероятности принять «0» за «1», равной $p_{01}$, и вероятности принять «1» за «0» $p_{10}$. Полагая, что в реальных условиях эксплуатации канала вероятности появления в сообщении «0» и «1» одинаковы, предложить тестовую последовательность и оценить среднюю вероятность ошибки $p_{ош}$ с погрешностью, не хуже 1% для случая, когда $p_{01} = 0.1$, $p_{10} = 0.15$. Смоделировать процесс на выходе детектора для выбранного тестового сигнала и алгоритм оценивания в среде MATHCAD.

# Вариант 5

## Задача 1

Радиолиния управления может обеспечить передачу команды без искажения в том случае, если помеха $\xi(t)$, воздействующая на вход приемника, в течение передачи по абсолютной величине ни разу не превзойдет некоторый уровень $h$. Определить вероятность $p$ передачи команды без искажения, если $\xi(t)$ - гауссовская случайная функция, $m_\xi = 0$, $R_\xi(\tau) = \alpha \cdot e^{-\alpha\cdot\tau}(1 + \alpha \cdot |\tau|)$, а время передачи команды равно $T$.

## Задача 2

На вход идеальной дифференцирующей цепи воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $X(t)$ с нулевым средним значением $m_X = 0$ и корреляционной функцией

$R_X(\tau) = D_X \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot (1 + \alpha\tau)$.

Определить корреляционную функцию процесса $Y(t) = dX(t)/dt$ на выходе.

## Задача 3

Объектом наблюдения является процесс $x(t) = U_m s(t) + \eta(t)$. $U_m$ – амплитуда сигнала; $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ – нормированный по амплитуде гармонический сигнал; $T$ – период сигнала; $\varphi$ – начальная фаза; $\eta(t)$ – шум, представляющий собой стационарный дифференцируемый гауссов процесс с дисперсией $\sigma^2$. Для оценки периода синусоидального сигнала в цифровых системах используют метод, основанный на измерении длин интервалов между соседними пересечениями наблюдаемым процессом нулевого уровня. Плотности распределения вероятностей *i*-го момента времени пересечения нулевого уровня

снизу-вверх (передний фронт) и сверху вниз (задний фронт) имеют вид:

$$w(t_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_+^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^+ - t_{00}^+ - iT)^2}{2\sigma_+^2} \right\},$$

$$w(t_i^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_-^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^- - t_{00}^+ - T/\nu - iT)^2}{2\sigma_-^2} \right\}.$$

Здесь $\sigma_+ = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT)|]$, $\sigma_- = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT + T/\nu)|]$, $t_{00}^+ = \varphi \cdot T/2\pi$, $q = U_m/\sigma$ - отношение сигнал/шум, $\nu$ - скважность сигнала, измеренная на уровне 0 В (для синусоиды $\nu = 2$), $s'(\cdot)$ - производная сигнала $s(t)$. Используя метод максимального правдоподобия, оценить период сигнала $T$ при условии, что величины $U_m$, $\varphi$ и $\sigma^2$ заранее неизвестны. Оценить погрешность при $q = 10$ и $n = 100$. Смоделировать решение задачи в среде MATHCAD.

# Вариант 6

## Задача 1

В системе, составленной из последовательного соединения резистора $R$ и индуктивности $L$ протекает стационарный в широком смысле дифференцируемый флуктуационный ток $\xi(t)$ с математическим ожиданием $m_\xi$ и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию напряжения на индуктивности.

## Задача 2

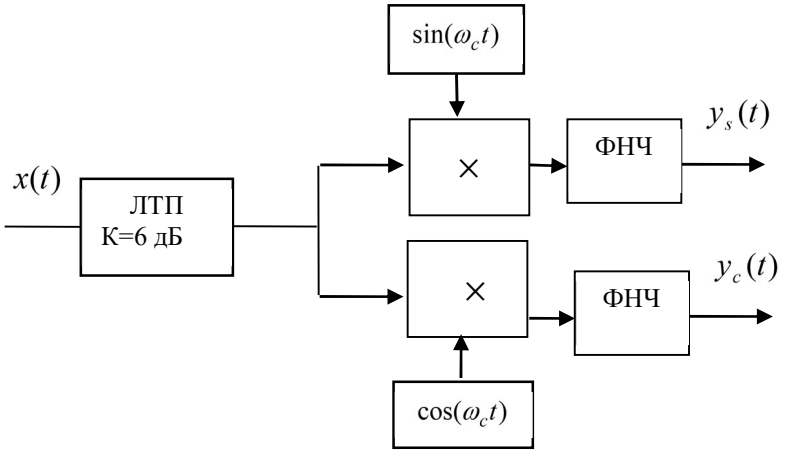
На вход идеальной дифференцирующей цепи воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $X(t)$ с нулевым средним значением $m_X = 0$ и корреляционной функцией

$$R_X(\tau) = D_X \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \left( \cos(\omega_0 \tau) + \frac{\alpha}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 |\tau|) \right).$$

Определить корреляционную функцию процесса $Y(t) = dX(t)/dt$ на выходе.

## Задача 3

На вход линейного тракта приемника с прямоугольной частотной характеристикой, коэффициентом передачи $K$ = 6 дБ, центральной частотой, совпадающей с несущей частотой сигнала, и полосой пропускания $\Delta f = 10$ кГц воздействует процесс $x(t)$, представляющий собой аддитивную смесь сигнала $U_m \sin(\omega_c t + \varphi)$ и стационарного белого гауссового шума $\eta(t)$ с неизвестной спектральной плотностью $N_0$, т.е. $x(t) = U_m \sin(\omega_c \cdot t + \varphi) + \eta(t)$, где $U_m$ – амплитуда, $\omega_c = 2\pi f_c$, $f_c$ – частота, $\varphi$ – неизвестная начальная фаза сигнала. Частота сигнала $f_c$ =1000 кГц. Доступными для наблюдения являются процессы на выходе квадратурного детектора $y_s(t)$ и $y_c(t)$ (комплексная огибающая процесса), ФНЧ – «идеальный» фильтр с прямоугольной частотной характеристикой и полосой пропускания 10 кГц, процессы на выходе квадратурных каналов статистически не зависимы.




Выбрать шаг дискретизации и, используя метод моментов, оценить величину амплитуды входного сигнала. Определить требуемое число измерений $n$ для обеспечения среднеквадратической погрешности оценки не хуже 1 % при отношении сигнал/шум на выходе приемника 3 дБ. Смоделировать задачу в среде MATHCAD.

# Вариант 7

## Задача 1

Четыре РЛС ведут наблюдение за областью пространства, в которой находится три объекта: $S_1$, $S_2$, $S_3$. Наблюдение ведется в течение некоторого фиксированного времени. За это время *j*-я станция обнаруживает *i*-й объект с вероятностью $p_{ij}$ (*i* = 1,2,3; *j* = 1,2,3,4). Найти математическое ожидание числа обнаруженных объектов *x*.

## Задача 2

На вход идеальной дифференцирующей цепи воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $X(t)$ с нулевым средним значением $m_X = 0$ и корреляционной функцией

$R_X(\tau) = D_X \cdot e^{-\alpha^2\tau^2}$.

Определить корреляционную функцию процесса $Y(t) = dX(t)/dt$ на выходе.

## Задача 3

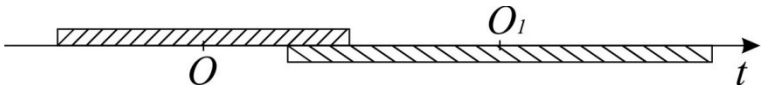
Наблюдаемый на выходе линейного тракта приемника процесс $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь сигнала $U_m \sin(\omega t + \phi)$ и стационарного белого гауссового шума $\eta(t)$ с неизвестной спектральной плотностью $N_0$, т.е. $x(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi) + \eta(t)$, где $U_m$ – амплитуда, $\omega = 2\pi f$, где $f$ – частота, φ – начальная фаза сигнала. Частота сигнала $f = 300$ кГц, полоса пропускания приемника $\Delta f = 500$ кГц, коэффициент передачи постоянен в полосе пропускания и равен 6 дБ, начальная фаза сигнала равна π/2. Выбрать шаг дискретизации из условия независимости отсчетов, найти оценку максимального правдоподобия амплитуды сигнала и определить ее относительную погрешность, если длина интервала наблюдения $\Delta T = 100$ мкс; $N_0 = 10^{-5}$ В$^2$/Гц; отношение сигнал/шум на выходе линейного тракта приемника $q^2 = U_{mo}^2 / \sigma^2 = 30$ дБ ($U_{mo}^2$ и $\sigma^2$ - соответственно квадрат амплитуды сигнала и дисперсия процесса на выходе линейного тракта приемника). Смоделировать задачу в среде MATHCAD.

# Вариант 8

## Задача 1

По радиоканалу передается сообщение длительности $\tau_S$. Для того, чтобы подавить это сообщение, на канал действует помеха длительностью $\tau_П > \tau_S$, рассчитанная так, чтобы центр помехи $O_1$ совпадал с центром сообщения $O$. Из-за случайных ошибок центр помехи смещен относительно центра сообщения на величину $\tau$, распределенную по нормальному закону со средним значением $m = 0$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma = \tau_S/2$.

Найти распределение случайной величины $X$ - длины части сообщения, подавленной помехой, а также среднего значения $m_X$.




## Задача 2

Корреляционная функция процесса $X(t)$ имеет вид:

$R_X(\tau) = e^{-\alpha^2\tau^2}$.

Найти корреляционную функцию процесса $Y(t) = X(t) + dX(t)/dt$.

## Задача 3

Наблюдаемый на выходе линейного тракта приемника процесс $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь сигнала $U_m \sin(\omega t + \phi)$ и стационарного белого гауссова шума $\eta(t)$ с неизвестной спектральной плотностью $N_0$, т.е. $x(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi) + \eta(t)$, где $U_m$ – амплитуда, $\omega = 2\pi f$, где $f$ – частота, φ – начальная фаза сигнала. Частота сигнала $f = 100$ кГц, полоса пропускания приемника $\Delta f = 200$ кГц, коэффициент передачи постоянен в полосе пропускания и равен 3 дБ, начальная фаза сигнала равна 0. Выбрать шаг дискретизации из условия независимости отсчетов, найти оценку максимального правдоподобия амплитуды сигнала на входе и определить длину интервала наблюдения, обеспечивающего относительную погрешность оценки 1 % при $N_0$ = $10^{-5}$ В$^2$/Гц, отношении сигнал/шум на выходе линейного тракта приемника $q^2 = U_{mo}^2/\sigma^2 = 40$ дБ ($U_{mo}^2$ и $\sigma^2$ - соответственно квадрат амплитуды сигнала и дисперсия процесса на выходе линейного тракта приемника). Смоделировать задачу в среде MATHCAD.

# Вариант 9

## Задача 1

По радиоканалу передается последовательность сообщений одинаковой длительности $\tau$ со случайными промежутками $\theta_1, \theta_2, ...$ между ними. Интервалы $\theta_i$, $i$ = 1,2,..., имеют одинаковые распределения. Время от времени на сообщение накладываются случайные помехи. Сообщение и помехи независимы. Длительность $r_i$ каждой помехи случайна и распределена по показательному закону с параметром $\mu$. Длительность интервалов между помехами $L_i$ тоже случайна и распределена по показательному закону с параметром $\gamma$. Если помехи накладываются на все сообщение или его часть, искажается либо все сообщение, либо соответствующая его часть. Найти среднюю долю сообщения, которая будет искажена помехами, т.е. отношение средней длины искаженного текста к средней длине переданного.

## Задача 2

Корреляционная функция $R_X(\tau)$ случайного процесса имеет вид

$$R_X(\tau) = D_X e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right).$$

Найти взаимную корреляционную функцию процессов $X(t)$ и $Y(t) = dX(t)/dt$.

## Задача 3

Наблюдаемый на выходе линейного тракта процесс представляет собой аддитивную смесь $n$ прямоугольных импульсов с различными (и неизвестными) амплитудами $\mu_i$: $i = 0,..,n-1$, и стационарного белого гауссова шума с неизвестной спектральной плотностью $N_0$. Длительности импульсов и шаг дискретизации соотносятся между собой таким образом, что на протяжении каждого импульса берется только два независимых отсчета $x_i$ и $y_i$. Полоса пропускания линейного тракта приемника известна и равна $\Delta f$ и обеспечивает неискаженную передачу импульсов, коэффициент передачи равен 2 во всей полосе пропускания. Найти оценку максимального правдоподобия параметров $\mu_i$, $i$=0,..,$n$ – 1 при $\Delta f = 1$ МГц, $n = 10$.

Истинные значения: $N_0$ = $10^{-5}$ В$^2$/Гц, $\mu_i = \begin{cases} 0, i = 0,2,4,6,..., \\ 1, i = 1,2,3,5,... \end{cases}$ В, $i = 0,..,n-1$. Смоделировать задачу оценивания в среде MATHCAD.

# Вариант 10

## Задача 1

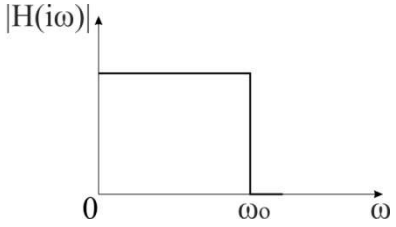
Момент появления сигнала есть случайная величина $\tau_0$ с плотностью вероятности $W(t)$. В какой-то момент времени $t < \tau$ сигнал еще не появился. Найти вероятность того, что он появится за последующий промежуток времени от $t$ до $\tau$.

## Задача 2

Стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией

$$R_X(\tau) = D_X \cdot e^{-\alpha|\tau|}$$

воздействует на фильтр нижних частот, амплитудно-частотная характеристика которого приведена на рисунке. Найти дисперсию $D_Y$ выходного напряжения $Y(t)$.




## Задача 3

Наблюдаемый на выходе линейного тракта приемника процесс представляет собой аддитивную смесь $n$ прямоугольных импульсов с различными (и неизвестными) амплитудами $\mu_i$: $i = 0,..,n-1$, и белого стационарного гауссова шума с неизвестной спектральной плотностью $N_0$. Длительности импульсов и шаг дискретизации соотносятся между собой таким образом, что на протяжении каждого импульса берется только два независимых отсчета $x_i$ и $y_i$. Полоса пропускания линейного тракта приемника известна и равна $\Delta f$ и обеспечивает неискаженную передачу импульсов, коэффициент передачи по напряжению равен 1 (повторитель). Найти оценку максимального правдоподобия параметра $N_0$ и определить ее погрешность при $\Delta f = 100$ кГц, $\mu_i = \begin{cases} 1, i = 0,2,4,6,..., \\ 0, i = 1,3,5,7... \end{cases}$ В, $i = 0,..,n-1$, $n = 100$. Истинное значение $N_0 = 10^{-4}$ В$^2$/Гц

Смоделировать задачу оценивания в среде MATHCAD.

# Вариант 11

## Задача 1

РЛС следит за областью пространства, где находится $N$ объектов. За один цикл оборота $i$-й объект (независимо от других) обнаруживается с вероятностью $p_i$, , $i$ = 1,2,...,$N$. За время наблюдения осуществляется $n$ циклов оборота. Найти среднее значение и дисперсию числа объектов $\mu$, которые будут обнаружены.

## Задача 2

На линейную систему с импульсной характеристикой $h(t)$ воздействует стационарный гауссовский белый шум $X(t)$ с корреляционной функцией $R_X(\tau) = \left(N_0/2\right)\delta(\tau)$. Определить корреляционную функцию и дисперсию $D_Y$ выходного процесса $Y(t)$.

## Задача 3

Наблюдается процесс $x(t) = U_m s(t) + \eta(t)$. $U_m$ – амплитуда сигнала; $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ – нормированный по амплитуде синусоидальный сигнал; $T$ – период; $\varphi$ – начальная фаза; $\eta(t)$ - стационарный дифференцируемый гауссов процесс с дисперсией $\sigma^2$. Для оценки периода синусоидального сигнала в цифровых системах используют метод, основанный на измерении длин интервалов между соседними пересечениями наблюдаемым процессом нулевого уровня. Плотности распределения вероятностей $i$-го момента времени пересечения нулевого уровня снизу вверх (передний фронт) и сверху вниз (задний фронт) имеют вид:

$$w(t_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_+^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^+ - t_{00}^+ - iT)^2}{2\sigma_+^2} \right\},$$

$$w(t_i^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_-^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^- - t_{00}^+ - T/\nu - iT)^2}{2\sigma_-^2} \right\}.$$

Здесь $\sigma_+ = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT)|]$, $\sigma_- = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT + T/\nu)|]$, $t_{00}^+ = \varphi \cdot T/2\pi$, $q = U_m/\sigma$ - отношение сигнал/шум, $\nu$ - скважность сигнала, измеренная на уровне 0 В (для синусоиды $\nu = 2$), $s'(\cdot)$ - производная сигнала $s(t)$.

Оценить период сигнала $T$ с использованием полных достаточных статистик при условии, что отношение сигнал-шум и начальная фаза (момент $t_{00}^+$ первого пересечения нулевого уровня) являются априорно неопределенными. Скважность считать известной. Определить погрешность оценки при $q = 50$ и $n = 800$. Смоделировать задачу в среде MATHCAD.

# Вариант 12

## Задача 1

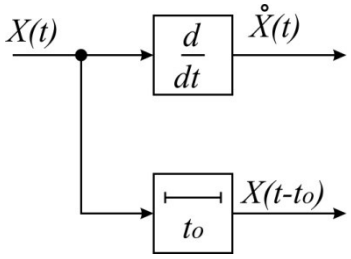
Счетчик Гейгера определяет число частиц, попадающих на него за интервал времени *T*. Поток частиц - пуассоновский с интенсивностью $\lambda$. Каждая частица регистрируется счетчиком с вероятностью *p*. Счетчик включается на случайное время, распределенное по показательному закону с параметром $\mu$. Число зарегистрированных частиц - случайная величина *X*. Найти закон распределения, среднее значение $m_X$ и дисперсию $D_X$.

## Задача 2

На вход радиотехнического устройства , состоящего из линии задержки на время $t_{зад} = t_0$ и дифференцирующей схемы воздействует стационарный случайный процесс $X(t)$ с нулевым средним значением $m_X = 0$ и корреляционной функцией

$R_X(\tau) = D_X \cdot e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$.

Определить корреляционные функцию процессов $X(t - t_0)$ и $Y(t) = \dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.




## Задача 3

Объектом наблюдения является процесс $x(t) = U_m s(t) + \eta(t)$. $U_m$ – амплитуда сигнала; $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ – нормированный по амплитуде гармонический сигнал; $T$ – период сигнала; $\varphi$ – начальная фаза; $\eta(t)$ – шум, представляющий собой стационарный дифференцируемый гауссов процесс с дисперсией $\sigma^2$. Для оценки периода синусоидального сигнала в цифровых системах используют метод, основанный на измерении длин интервалов между соседними пересечениями наблюдаемым процессом нулевого уровня. Плотности распределения вероятностей *i*-го момента времени пересечения нулевого уровня снизу вверх (передний фронт) и сверху вниз (задний фронт) имеют вид:

$$w(t_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_+^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^+ - t_{00}^+ - iT)^2}{2\sigma_+^2} \right\},$$

$$w(t_i^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_-^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^- - t_{00}^+ - T/\nu - iT)^2}{2\sigma_-^2} \right\}.$$

Здесь $\sigma_+ = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT)|]$, $\sigma_- = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT + T/\nu)|]$, $t_{00}^+ = \varphi \cdot T/2\pi$, $q = U_m/\sigma$ - отношение сигнал/шум, $\nu$ - скважность сигнала, измеренная на уровне 0 В (для синусоиды $\nu = 2$), $s'(\cdot)$ - производная сигнала $s(t)$.

Оценить период сигнала $T$ с использованием полных достаточных статистик при условии, что отношение сигнал-шум и начальная фаза (момент $t_{00}^+$ первого пересечения нулевого уровня) являются априорно неопределенными. Скважность считать известной. Определить погрешность оценки при $q = 50$ и $n = 800$. Смоделировать задачу в среде MATHCAD.

# Вариант 13

## Задача 1

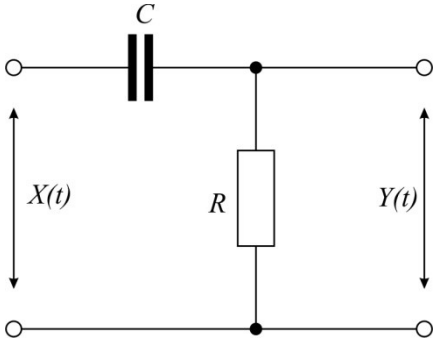
При измерении физических величин результат измерения неизбежно округляется в соответствии с минимальной ценой деления прибора. При этом непрерывная случайная величина превращается в дискретную, возможные значения которой отделены друг от друга интервалами, равными цене деления. В связи с этим возникает следующая задача. Непрерывная случайная величина $X$, распределенная по закону $W_X(x)$, округляется до ближайшего целого числа. Получается дискретная случайная величина $Y = [X]$, где $[X]$ - целое число, ближайшее к $X$. Найти ряд распределения случайной величины $Y$ и ее числовые характеристики.

## Задача 2

На вход дифференцирующей цепи воздействует случайное напряжение $X(t)$, представляющее собой ограниченный по частоте белый шум, энергетический спектр которого определен выражением:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} N_0 \ \textit{при} \ 0 < \omega \le \omega_1, \\ 0 \ \textit{при} \ \omega < 0, \ \omega > \omega_1. \end{cases}$$

Найти дисперсию $D_Y$ напряжения $Y(t)$ на выходе цепи.




## Задача 3

Наблюдается процесс $x(t) = U_m s(t) + \eta(t)$. $U_m$ – амплитуда сигнала; $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ – нормированный по амплитуде синусоидальный сигнал; $T$ – период; $\varphi$ – начальная фаза; $\eta(t)$ - стационарный дифференцируемый гауссов процесс с дисперсией $\sigma^2$. Для оценки периода синусоидального сигнала в цифровых системах используют метод, основанный на измерении длин интервалов между соседними пересечениями наблюдаемым процессом нулевого уровня. Плотности распределения вероятностей *i*-го момента времени пересечения нулевого уровня снизу вверх (передний фронт) и сверху вниз (задний фронт) имеют вид:

$$w(t_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_+^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^+ - t_{00}^+ - iT)^2}{2\sigma_+^2} \right\},$$

$$w(t_i^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_-^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^- - t_{00}^+ - T/\nu - iT)^2}{2\sigma_-^2} \right\}.$$

Здесь $\sigma_+ = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT)|]$, $\sigma_- = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT + T/\nu)|]$, $t_{00}^+ = \varphi \cdot T/2\pi$, $q = U_m/\sigma$ - отношение сигнал/шум, $\nu$ - скважность сигнала, измеренная на уровне 0 В (для синусоиды $\nu = 2$), $s'(\cdot)$ - производная сигнала $s(t)$.

Оценить период сигнала $T$ с использованием полных достаточных статистик при условии, что отношение сигнал-шум, скважность и начальная фаза (момент $t_{00}^+$ первого пересечения нулевого уровня) являются априорно неопределенными. Определить погрешность оценки при $q = 50$ и $n = 800$. Смоделировать задачу в среде MATHCAD.

# Вариант 14

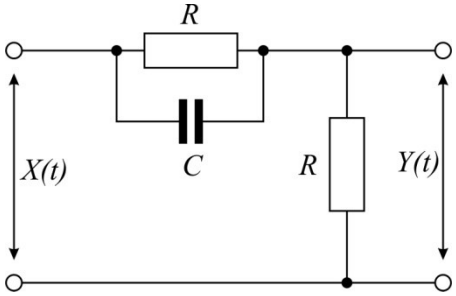
## Задача 1

Ковариационная функция гауссовского случайного процесса имеет вид:
$K_\xi(t_1, t_2) = D \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot exp(-\alpha|t_2 - t_1|)(1 + \alpha|t_2 - t_1|)$.
Определить время *t*, начиная с которого среднее число выбросов за уровень $h = m_\xi$ в единицу времени станет больше заданного числа *k*.

## Задача 2

Напряжение на входе фильтра представляет собой случайный стационарный процесс. Определить отношение дисперсии $D_Y$ выходного напряжения $Y(t)$ к дисперсии $D_X$ входного напряжения $X(t)$, если задан энергетический спектр выходного процесса:

$S_X(\omega) = S_0 \cdot e^{-\beta \cdot \omega^2}$. $S_0 > 0$, $\beta > 0$ - постоянные детерминированные величины.




## Задача 3

Объектом наблюдения является процесс $x(t) = U_m s(t) + \eta(t)$. $U_m$ – амплитуда сигнала; $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ – нормированный по амплитуде гармонический сигнал; $T$ – период сигнала; $\varphi$ – начальная фаза; $\eta(t)$ – шум, представляющий собой стационарный дифференцируемый гауссов процесс с дисперсией $\sigma^2$. Для оценки периода синусоидального сигнала в цифровых системах используют метод, основанный на измерении длин интервалов между соседними пересечениями наблюдаемым процессом нулевого уровня. Плотности распределения вероятностей *i*-го момента времени пересечения нулевого уровня снизу вверх (передний фронт) и сверху вниз (задний фронт) имеют вид:

$$w(t_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_+^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^+ - t_{00}^+ - iT)^2}{2\sigma_+^2} \right\},$$

$$w(t_i^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_-^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^- - t_{00}^+ - T/\nu - iT)^2}{2\sigma_-^2} \right\}.$$

Здесь $\sigma_+ = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT)|]$, $\sigma_- = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT + T/\nu)|]$, $t_{00}^+ = \varphi \cdot T/2\pi$, $q = U_m/\sigma$ - отношение сигнал/шум, $\nu$ - скважность сигнала, измеренная на уровне 0 В (для синусоиды $\nu = 2$), $s'(\cdot)$ - производная сигнала $s(t)$.

Оценить период сигнала $T$ с использованием полных достаточных статистик при условии, что отношение сигнал-шум, скважность и начальная фаза (момент $t_{00}^+$ первого пересечения нулевого уровня) являются априорно неопределенными. Определить погрешность оценки при $q = 50$ и $n = 800$. Смоделировать задачу в среде MATHCAD.

## Вариант 15

## Задача 1

Высота $H(t)$ полета самолета, управляемого автопилотом, - нормально распределенная случайная функция, математическое ожидание которой $h$ равно заданной высоте полета, а корреляционная функция

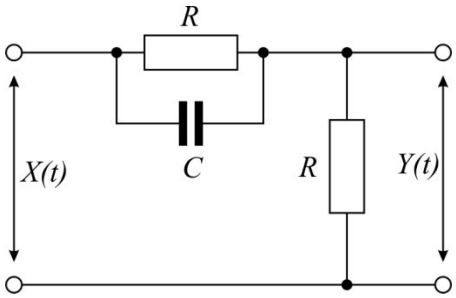
$$R_H(\tau) = D \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|} \cdot \left( cos(\beta \cdot \tau) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot sin(\beta \cdot |\tau|) \right).$$

Определить, какую наименьшую высоту $h$ можно установить в приборе автономного полета, чтобы за время полета $T$ вероятность аварии самолета вследствие столкновения с поверхностью Земли была меньше $\delta = 0.01\%$, если $D = 400\text{м}^2, \alpha = 0.01\text{с}^{-1}, \beta = 0.1\text{с}^{-1}, T = 5\text{час}$.

## Задача 2

Напряжение на входе фильтра представляет собой случайный стационарный процесс. Определить отношение дисперсии $D_Y$ выходного напряжения $Y(t)$ к дисперсии $D_X$ входного напряжения $X(t)$, если задан энергетический спектр выходного процесса:

$S_X(\omega) = S_0 \cdot e^{-\beta \cdot |\omega|}$. $S_0 > 0$, $\beta > 0$ - постоянные детерминированные величины.




## Задача 3

Объектом наблюдения является процесс $x(t) = U_m s(t) + \eta(t)$. $U_m$ – амплитуда сигнала; $s(t)$ – нормированный по амплитуде сигнал; $\eta(t)$ – шум, представляющий собой стационарный

дифференцируемый гауссов процесс с дисперсией $\sigma^2$. Для оценки периода синусоидального сигнала в цифровых системах используют метод, основанный на измерении длин интервалов между соседними пересечениями наблюдаемым процессом нулевого уровня. Плотности распределения вероятностей *i*-го момента времени пересечения нулевого уровня снизу вверх (передний фронт) и сверху вниз (задний фронт) имеют вид:

$$w(t_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_+^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^+ - t_{00}^+ - iT)^2}{2\sigma_+^2} \right\},$$

$$w(t_i^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_-^2}} \exp\left\{ -\frac{(t_i^- - t_{00}^+ - T/\nu - iT)^2}{2\sigma_-^2} \right\}.$$

Здесь $\sigma_+ = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT)|]$, $\sigma_- = 1/[q|s'(t_{00}^+ + iT + T/\nu)|]$, $t_{00}^+ = \varphi \cdot T / 2\pi$, $q = U_m / \sigma$ - отношение сигнал/шум, $\nu$ - скважность сигнала, измеренная на уровне 0 В (например, для синусоиды $\nu = 2$), $s'(\cdot)$ - производная сигнала $s(t)$.

Оценить период сигнала $T$ с использованием полных достаточных статистик при условии, что отношение сигнал-шум, скважность и начальная фаза (момент $t_{00}^+$ первого пересечения нулевого уровня) являются априорно неопределенными. Определить погрешность оценки при $q = 5$ и $n = 2000$. Смоделировать задачу в среде MATHCAD.